

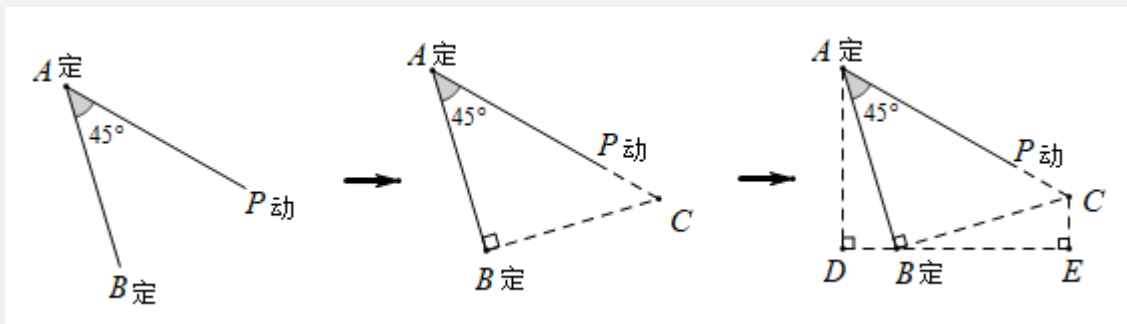
第3讲二次函数与角度存在性

1. 定角问题

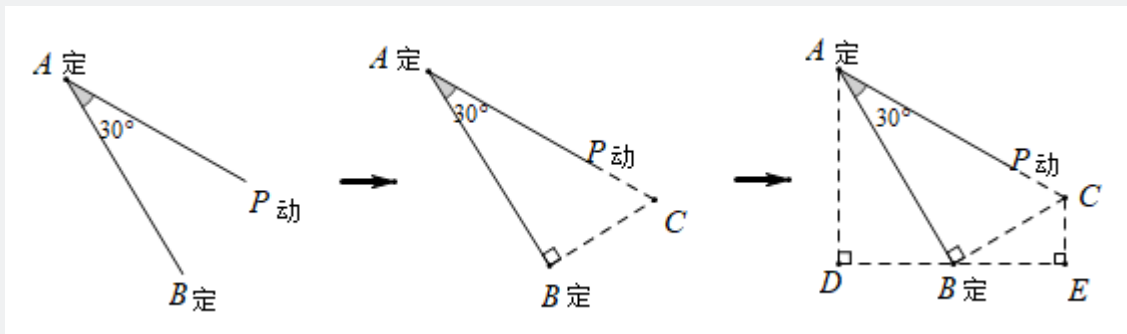
🔗 教法备注

对于角的存在性问题，基本策略是构造“一线三直角”模型，利用相似解题。

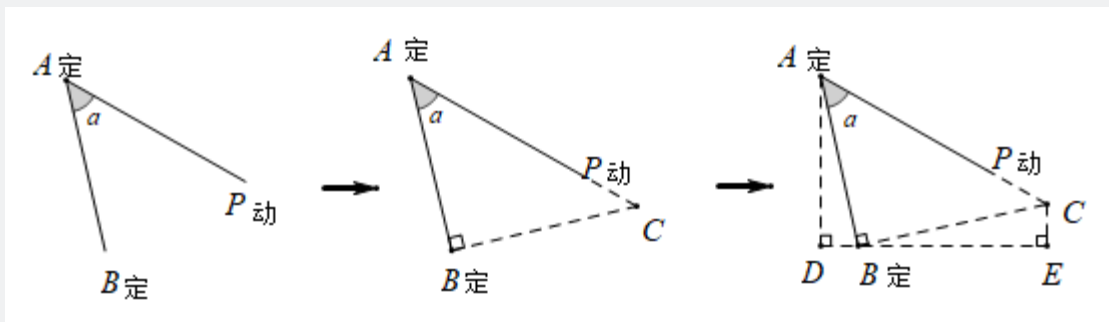
1. 45° 角→构造等腰直角三角形→构造“一线三直角”全等



2. 30° 角→构造直角三角形→构造“一线三直角”相似



3. $\tan \alpha = k$ →构造直角三角形→构造“一线三直角”相似



注：在构造直角三角形时，建议以已知点B作为直角顶点，方便快捷，否则若以动点P为直角顶点，则需要设元求解。

除此之外，也可以构造一些常见的几何模型，如“一线三等角”、“母子型相似”、“半角模型”等。

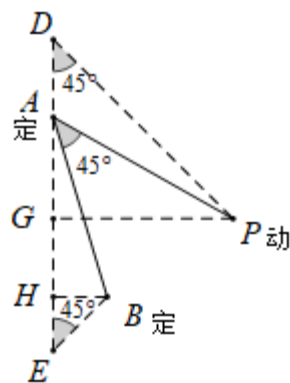
以 45° 角为例，

1. 构造“一线三等角”：

如图, $\triangle ADP \sim \triangle EBA$

$$\rightarrow DP \cdot BE = AD \cdot AE$$

$$\rightarrow \sqrt{2}PG \cdot \sqrt{2}BH = AD \cdot AE$$

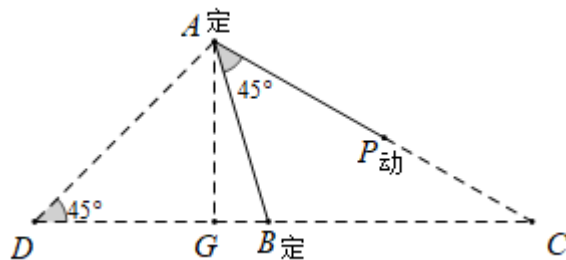


2. 构造“母子型相似”:

如图, $\triangle ACB \sim \triangle DCA$

$$\rightarrow AC^2 = BC \cdot CD$$

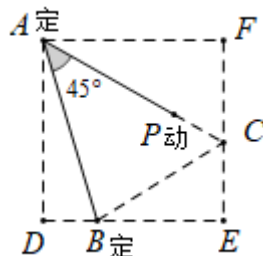
$$\rightarrow AG^2 + CG^2 = BC \cdot CD$$



3. 构造“半角模型”

如图, $BC = BD + CF$

$$\rightarrow BE^2 + CE^2 = (BD + CF)^2$$



纵观以上解题思路, 都是通过构造常见几何模型确定直线AP, 然后再与点P所在的抛物线联立方程组, 求交点即可. 若遇到30°等特殊角或更一般的已知其三角函数值的确定角, 都可以类似解决.

在遇到一些角度如15°、75°、105°时, 可以将其看做是某两个特殊角的和差, 如

15°=45°-30°=60°-45°, 75°=45°+30°, 105°=60°+45°等, 继而转化为定角问题;

典题精练1

1. 抛物线 $C_1: y_1 = x^2 + 2x + c$ 的顶点为 P , 交 y 轴与点 C , 对称轴交 x 轴于点 D , 点 D 与点 P 不重合.

平移 C_1 使其经过点 C, D , 得抛物线 C_2 , 顶点为 M , 对称轴交 x 轴于点 D' .

(1) 当 $c = -5$ 时, 求点 P 和点 C 的坐标.

(2) 当 PM 与 x 轴的夹角为45°时, 求抛物线 C_2 的解析式.

(3) 设点 C 关于 D' 的对称点为 Q , 当 D 与 Q 不重合时, 求 D, Q 两点所在直线的解析式.

【答案】(1) $C(0, -5)$, $P(-1, -6)$.

(2) $y_2 = x^2 - 1$ 或 $y_2 = x^2 - 4x - 5$.

(3) $y = x + 1$.

【解析】(1) $\because c = -5$,

$\therefore C(0, -5)$,

将 $c = -5$ 代入 $y_1 = x^2 + 2x + c$ 得:

$y_1 = x^2 + 2x - 5$,

$\therefore y_1 = (x + 1)^2 - 6$,

$\therefore P(-1, -6)$.

(2) y_2 由 y_1 平移且过点 C , 则 $y_2 = x^2 + bx + c$,

将点 $D(-1, 0)$ 代入上式并整理得: $b = c + 1$,

故 $y_2 = x^2 + (c + 1)x + c = \left(x + \frac{c + 1}{2}\right)^2 - \frac{(c - 1)^2}{4}$,

则点 $M\left[-\frac{1}{2}(c + 1), -\frac{1}{4}(c - 1)^2\right]$,

$\therefore PM$ 与 x 轴的夹角为 45° ,

$\therefore c - 1 + \frac{(c - 1)^2}{4} = \left|-1 + \frac{c + 1}{2}\right|$,

解得: $c = \pm 1$ 或 -5 (舍去 1)

故: $c = -1$ 或 -5 .

故: $y_2 = x^2 - 1$ 或 $y_2 = x^2 - 4x - 5$.

(3) $y_2 = x^2 + (c + 1)x + c$,

则点 $D'\left(-\frac{c + 1}{2}, 0\right)$,

点 C 于点 Q 关于点 D' 对称, 则点 $Q(-c - 1, -c)$,

D 、 Q 不重合, $\therefore c \neq 0$,

将点 $Q(-c - 1, -c)$ 、 $D(-1, 0)$ 代入一次函数表达式: $y = mx + n$ 并整理得:

$c(1 - m) = 0$,

$\because c \neq 0$, $\therefore m = 1$,

故 D 、 Q 两点所在直线的解析式为: $y = x + 1$.

【标注】【知识点】二次函数与角度问题

典题精练2

2. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 4a$ 经过 $A(-1, 0)$, $C(0, 4)$ 两点, 与 x 轴交于另一点 B .

$$\therefore \triangle QDG \cong \triangle DBH,$$

$$\therefore QG = DH = 4, DG = BH = 1.$$

由(2)知 $D(3, 4)$,

$$\therefore Q(-1, 3).$$

$$\therefore B(4, 0),$$

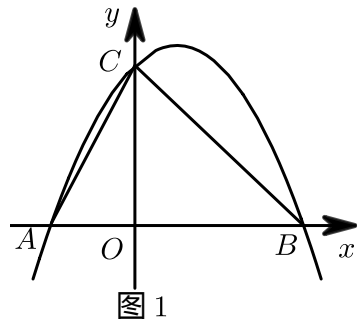
$$\therefore \text{直线 } BP \text{ 的解析式为 } y = -\frac{3}{5}x + \frac{12}{5},$$

$$\therefore \begin{cases} y = -x^2 + 3x + 4 \\ y = -\frac{3}{5}x + \frac{12}{5} \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -\frac{2}{5} \\ y_2 = \frac{66}{25} \end{cases}.$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{2}{5}, \frac{66}{25}\right)$$

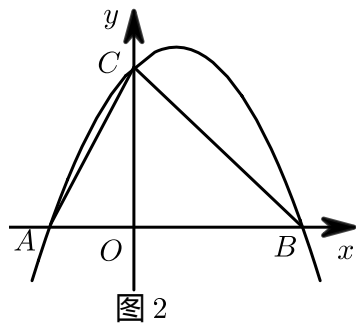
【标注】【知识点】二次函数与角度问题

3. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 经过点 $A(-2, 0)$ 点 $B(4, 0)$ 及点 $C(0, 4)$, 连结 AC 、 BC .



(1) 求抛物线的函数解析式.

(2) 点 P 是抛物线在第一象限内的一点, ①当 $\triangle BCP$ 面积最大时, 求点 P 的坐标. ②当 $\angle PCA = 135^\circ$ 时, 求点 P 的坐标.



【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4.$

(2) ① $P(2, 4)$ ② $P(\frac{4}{3}, \frac{40}{9}).$

【解析】 (1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4.$

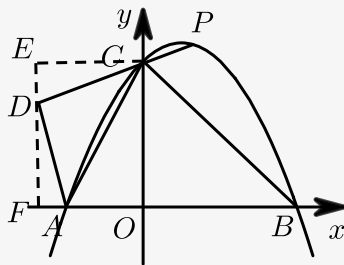
(2) ① $P(2, 4)$ 水平宽, 铅锤高求之.

②延长 PC ，作 $AD \perp DC$ ，

显然， $\angle DCA = 45^\circ$ ，

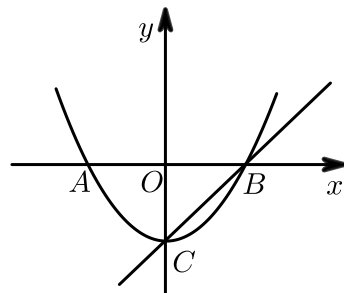
构造三垂直模型，可得 $D(-3, 3)$ ，

$\therefore PC$ 解析式： $y = \frac{1}{3}x + 4$ ，联立可得 $P(\frac{4}{3}, \frac{40}{9})$ 。



【标注】【知识点】二次函数与角度问题

4. 如图，已知顶点为 $C(0, -3)$ 的抛物线 $y = ax^2 + b(a \neq 0)$ 与 x 轴关于 A, B 两点，直线 $y = x + m$ 过顶点 C 和 B 。



- (1) 求点 B 的坐标。
- (2) 求二次函数 $y = ax^2 + b(a \neq 0)$ 的解析式。
- (3) 抛物线 $y = ax^2 + b(a \neq 0)$ 上是否存在点 M ，使得 $\angle MCB = 15^\circ$ ？若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】 (1) $(3, 0)$ 。

(2) $y = \frac{1}{3}x^2 - 3$ 。

(3) $(3\sqrt{3}, 6)$ 或 $(\sqrt{3}, -2)$ 。

【解析】 (1) 将 $(0, -3)$ 代入 $y = x + m$ ，可得 $m = -3$ 。

将 $y = 0$ 代入 $y = x - 3$ ，得 $x = 3$ ，

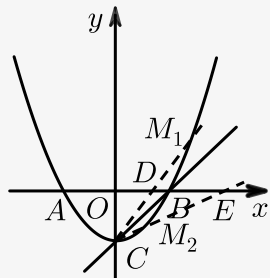
$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(3, 0)$ 。

(2) 将 $(0, -3)$ ， $(3, 0)$ 代入 $y = ax^2 + b$ 中，可得 $\begin{cases} b = -3 \\ 9a + b = 0 \end{cases}$ ，

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -3 \end{cases},$$

$$\therefore \text{二次函数的解析式为 } y = \frac{1}{3}x^2 - 3.$$

(3)



存在，分以下两种情况：

① 若点 M 在点 B 上方，设 MC 交 x 轴于点 D ，则 $\angle ODC = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$ ，

$$\therefore OD = OC \cdot \tan 30^\circ = \sqrt{3}.$$

设 DC 为 $y = kx - 3$ ，代入 $(\sqrt{3}, 0)$ ，可得 $k = \sqrt{3}$ ，联立两个方程可得：

$$y = \sqrt{3}x - 3$$

$$y = \frac{1}{3}x^2 - 3$$

$$\text{解得} \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = -3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 3\sqrt{3} \\ y_2 = 6 \end{cases}.$$

$$\therefore M_1(3\sqrt{3}, 6).$$

② 若点 M 在点 B 下方，设 MC 交 x 轴于点 E ，则 $\angle OEC = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$ ，

$$\therefore OE = OC \cdot \tan 60^\circ = 3\sqrt{3}.$$

设 EC 为 $y = kx - 3$ ，代入 $(3\sqrt{3}, 0)$ ，可得 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

$$\text{联立两个方程可得：} \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 3 \\ y = \frac{1}{3}x^2 - 3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = -3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = \sqrt{3} \\ y_2 = -2 \end{cases}.$$

$$\therefore M_2(\sqrt{3}, -2).$$

综上所述， M 的坐标为 $(3\sqrt{3}, 6)$ 或 $(\sqrt{3}, -2)$ 。

【标注】【知识点】二次函数与角度问题

经典再现

5. 在平面直角坐标系中，点 $O(0, 0)$ ，点 $A(1, 0)$ ，已知抛物线 $y = x^2 + mx - 2m$ ，(m 是常数)，顶点为 P 。

(1) 当抛物线经过点 A 时，求顶点 P 的坐标。

(2) 若点 P 在 x 轴下方，当 $\angle AOP = 45^\circ$ 时，求抛物线的解析式。

(3) 无论 m 取何值, 该抛物线都经过定点 H , 当 $\angle AHP = 45^\circ$ 时, 求抛物线的解析式.

【答案】 (1) 顶点 P 的坐标 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$.

(2) 抛物线的解析式为 $y = x^2 - 10x + 20$.

(3) 抛物线的解析式为 $y = x^2 - \frac{14}{5}x + \frac{28}{5}$ 或 $y = x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{44}{3}$.

【解析】 (1) $\because$ 抛物线 $y = x^2 + mx - 2m$ 经过点 $A(1, 0)$,

$\therefore 0 = 1 + m - 2m$, 解得 $m = 1$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = x^2 + x - 2$,

$\therefore y = x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$,

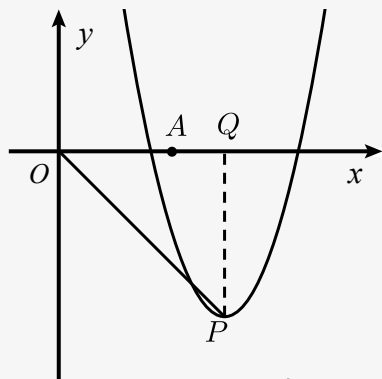
$\therefore$ 顶点 P 的坐标 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$.

(2) 抛物线 $y = x^2 + mx - 2m$ 的顶点 P 的坐标为 $\left(-\frac{m}{2}, -\frac{m^2 + 8m}{4}\right)$,

由点 $A(1, 0)$ 在 x 轴正半轴上, 点 P 在 x 轴下方, $\angle AOP = 45^\circ$,

知点 P 在第四象限,

过点 P 作 $PQ \perp x$ 轴于点 Q , 则 $\angle POQ = \angle OPQ = 45^\circ$,



可知 $PQ = OQ$, 即 $\frac{m^2 + 8m}{4} = -\frac{m}{2}$,

解得 $m_1 = 0$, $m_2 = -10$,

当 $m = 0$ 时, 点 P 不在第四象限, 舍去,

$\therefore m_2 = -10$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = x^2 - 10x + 20$.

(3) 由 $y = x^2 + mx - 2m = x^2 + (x - 2)m$ 可知,

当 $x = 2$ 时, 无论 m 取何值, y 都等于4,

得点 H 的坐标为 $(2, 4)$,

过点 A 作 $AD \perp AH$ 交射线 HP 于点 D ,

分别过 D, H 作 x 轴的垂线, 垂足分别为 E, G ,

则 $\angle DEA = \angle AGH = 90^\circ$,

 典题精练3

6. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $A(-6, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, -3)$.

(1) 求此抛物线的解析式.

(2) 若点 Q 在 y 轴上, 点 G 为该抛物线的顶点, 且 $\angle GQA = 45^\circ$, 求点 Q 的坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 3$.

(2) $(0, 2\sqrt{3})$ 或 $(0, -2\sqrt{3})$.

【解析】 (1) $\because y = ax^2 + bx + c$ 过点 $A(-6, 0)$, $B(2, 0)$,

$\therefore$ 设抛物线解析式为 $y = a(x+6)(x-2)$,

又 $\because$ 抛物线过点 $C(0, -3)$,

$$\therefore -12a = -3,$$

$$a = \frac{1}{4},$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}(x+6)(x-2)$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + x - 3.$$

$$(2) \because y = \frac{1}{4}x^2 + x - 3$$

$$= \frac{1}{4}(x+2)^2 - 4,$$

$\therefore$ 顶点 $G(-2, -4)$,

设抛物线的对称轴与 x 轴的交点为 M ,

$$\text{则 } GM = 4,$$

$$AM = \frac{1}{2}AB$$

$$= \frac{1}{2} \times [2 - (-6)]$$

$$= 4.$$

$\therefore GM = AM$ 且 $\angle AMG = 90^\circ$,

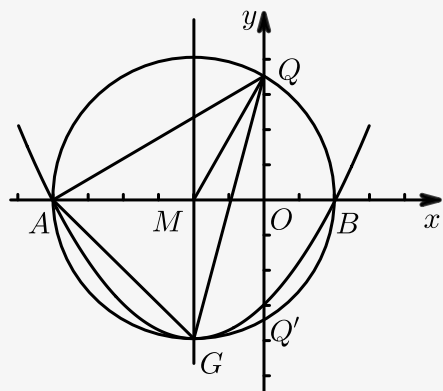
以 M 为圆心, MG 为半径的圆过点 A 、 B ,

与 y 轴交于点 Q 和点 Q' , 连接 QA , QG ,

由同弧所对的圆周角等于圆心角的一半可知:

$$\angle AQG = \frac{1}{2}\angle AMG = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ,$$

连接 QM .



在 $\text{Rt}\triangle OMQ$ 中, $OM = 2$, $QM = 4$,

$$\therefore OQ = \sqrt{4^2 - 2^2}$$

$$= 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore Q(0, 2\sqrt{3}),$$

由对称性可知, $Q'(0, -2\sqrt{3})$,

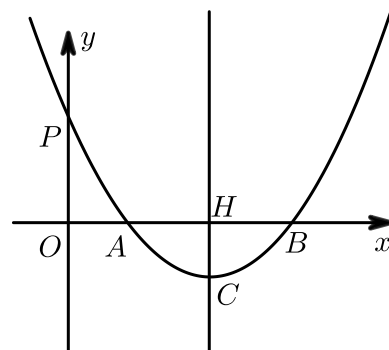
当点 Q 在线段 QQ' 之间或线段 QQ' 之外时,

均不能使 $\angle GQA = 45^\circ$,

综上, 满足条件的点 Q 坐标为 $(0, 2\sqrt{3})$ 或 $(0, -2\sqrt{3})$.

【标注】【知识点】二次函数与角度问题

7. 如图, 在平面直角坐标系中, 二次函数 $y = a(x-1)(x-5)$ ($a > 0$) 的图象与 x 轴交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于 P 点, 过其顶点 C 作直线 $CH \perp x$ 轴于点 H .



- (1) 若 $P(0, 3)$, 请求出二次函数的解析式.
 (2) 若 $\angle APB = 30^\circ$, 请求出满足条件的点 P 的坐标.

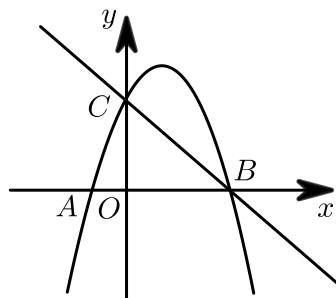
【答案】 (1) $y = \frac{3}{5}x^2 - \frac{18}{5}x + 3$.

(2) $(0, 2\sqrt{3} + \sqrt{7})$ 或 $(0, 2\sqrt{3} - \sqrt{7})$.

【解析】 (1) 将 $P(0, 3)$ 代入 $y = a(x-1)(x-5)$, 解得 $a = \frac{3}{5}$,

$$\therefore y = \frac{3}{5}(x-1)(x-5) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{18}{5}x + 3.$$

8. 如图, 已知二次函数 $y = -x^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, 与 y 轴交于点 C .



- (1) 求抛物线的解析式.
 (2) 抛物线上是否存在点 P , 使 $\angle PAB = \angle ABC$, 若存在请直接写出点 P 的坐标, 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 3$.

(2) 存在, $P_1(2, 3)$, $P_2(4, -5)$.

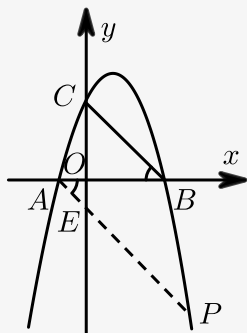
【解析】 (1) $\because$ 二次函数 $y = -x^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} -1 - b + c = 0 \\ -9 + 3b + c = 0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为: $y = -x^2 + 2x + 3$.

(2) 当点 P 在 x 轴下方时,

如图, 设 AP 与 y 轴相交于 E ,



令 $x = 0$, 则 $y = 3$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, 3)$,

$\because A(-1, 0)$, $B(3, 0)$,

$\therefore OB = OC = 3$, $OA = 1$,

$\therefore \angle ABC = 45^\circ$,

$\because \angle PAB = \angle ABC = 45^\circ$,

$\therefore \triangle OAE$ 是等腰直角三角形,

$\therefore OA = OE = 1$,

∴点 E 的坐标为 $(0, -1)$,

设直线 AE 的解析式为 $y = kx - 1$,

把 $A(-1, 0)$ 代入得: $k = -1$,

∴直线 AE 的解析式为 $y = -x - 1$,

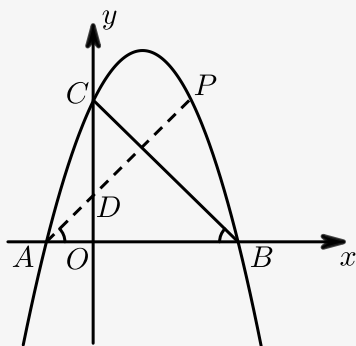
解方程组 $\begin{cases} y = -x - 1 \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases}$,

得: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ (舍去) 或 $\begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = -5 \end{cases}$,

∴点 P 的坐标为 $(4, -5)$,

当点 P 在 x 轴上方时,

如图, 设 AP 与 y 轴相交于 D ,



同理, 求得点 D 的坐标为 $(0, 1)$,

同理, 求得直线 AD 的解析式为 $y = x + 1$,

解方程组 $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases}$,

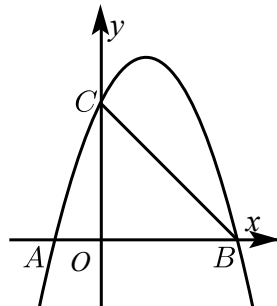
得: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ (舍去) 或 $\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 3 \end{cases}$,

∴点 P 的坐标为 $(2, 3)$,

综上, 点 P 的坐标为 $(2, 3)$ 或 $(4, -5)$.

【标注】【知识点】二次函数与角度问题

9. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ ($a \neq 0$) 与 x 轴分别交于点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, 与 y 轴交于点 C .



(1) 求抛物线的解析式.

(2)

设点 $D(2, m)$ 在第一象限的抛物线上，连接 BC ， BD ．试问，在对称轴左侧的抛物线上是否存在一点 P ，满足 $\angle PBC = \angle DBC$ ？如果存在，请求出点 P 的坐标；如果不存在，请说明理由．

【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 3$ ．

(2) 存在， $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{9}\right)$ ．

【解析】 (1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 3 (a \neq 0)$ 与 x 轴， y 轴分别交于点 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ，点 C 三点．

$$\therefore \begin{cases} a - b + 3 = 0 \\ 9a + 3b + 3 = 0 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$ ．

(2) $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x - 1)^2 + 4$ ，

$\because$ 点 $D(2, m)$ 在第一象限的抛物线上，

$\therefore m = 3$ ，

$\therefore D(2, 3)$ ，

$\therefore C(0, 3)$ ，

$\therefore OC = OB$ ，

$\therefore \angle OBC = \angle OCB = 45^\circ$ ，

连接 CD ，

$\therefore CD \parallel x$ 轴，

$\therefore \angle DCB = \angle OBC = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle DCB = \angle OCB$ ，

在 y 轴上取点 G ，使 $CG = CD = 2$ ，

再延长 BG 交抛物线于点 P ，

在 $\triangle DCB$ 和 $\triangle GCB$ 中，

$\therefore CB = CB$ ， $\angle DCB = \angle OCB$ ， $CG = CD$ ，

$\therefore \triangle DCB \cong \triangle GCB$ (SAS)，

$\therefore \angle DBC = \angle GBC$ ．

设直线 BP 解析式为 $y_{BP} = kx + b (k \neq 0)$ ，把 $G(0, 1)$ ， $B(3, 0)$ 代入，得 $k = -\frac{1}{3}$

， $b = 1$ ，

$\therefore BP$ 解析式为 $y_{BP} = -\frac{1}{3}x + 1$ ，

$y_{BP} = -\frac{1}{3}x + 1$ ， $y = -x^2 + 2x + 3$ ，

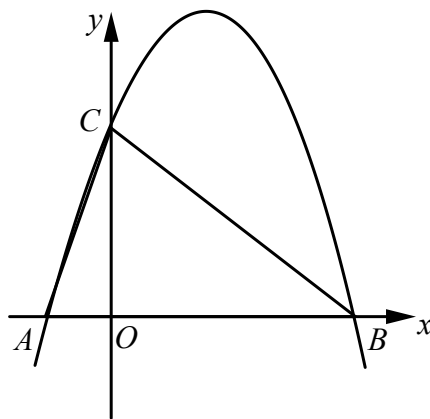
当 $y = y_{BP}$ 时， $-\frac{1}{3}x + 1 = -x^2 + 2x + 3$ ，

$$\begin{aligned} \text{解得 } x_1 &= -\frac{2}{3}, x_2 = 3 \text{ (舍去)}, \\ \therefore y &= \frac{11}{9}, \\ \therefore P &\left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{9}\right). \end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次函数与角度问题

典题精练2

10. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴的两个交点分别为 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ ，与 y 轴相交于点 C 。



- (1) 求抛物线的表达式。
- (2) 连接 AC 、 BC ，求 $\angle ACB$ 的正切值。
- (3) 点 P 在抛物线上，且 $\angle PAB = \angle ACB$ ，求点 P 的坐标。

【答案】(1) $y = -x^2 + 2x + 3$ 。

(2) 2。

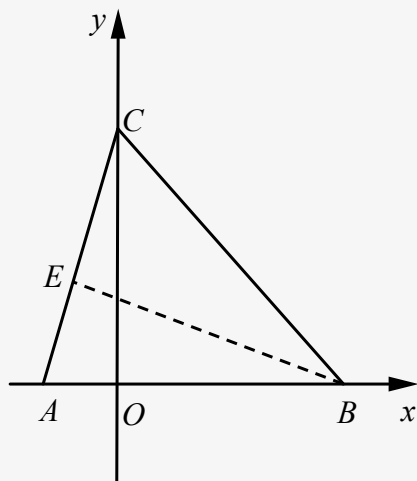
(3) $(1, 4)$ 或 $(5, -12)$ 。

【解析】(1) 把 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ 代入 $y = -x^2 + bx + c$ 中，

$$\begin{aligned} \text{得 } \begin{cases} -1 - b + c = 0 \\ -9 + 3b + c = 0 \end{cases} \\ \text{解得 } \begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \end{cases}. \end{aligned}$$

$\therefore$ 抛物线解析式 $y = -x^2 + 2x + 3$ 。

(2)



把 $x = 0$ 代入 $y = -x^2 + 2x + 3$ 中得 $y = 3$,

$\therefore C(0, 3)$,

过 B 作 $BE \perp AC$ 于点 E ,

$\therefore \angle BEC = 90^\circ$,

$\therefore A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 3)$,

$\therefore AB = 4$, $OC = 3$, $BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = 3\sqrt{2}$,

$AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{10}$,

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot OC = \frac{1}{2}AC \cdot BE$,

$\therefore AB \cdot OC = AC \cdot BE$,

即 $4 \times 3 = \sqrt{10} \cdot BE$,

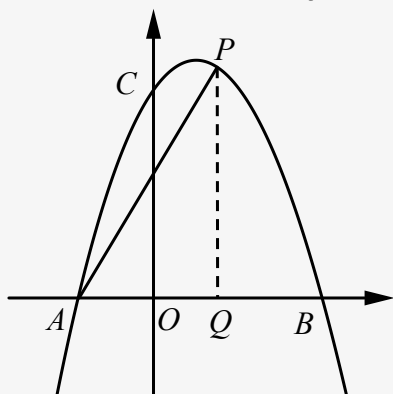
$\therefore BE = \frac{6}{5}\sqrt{10}$,

在 $\text{Rt}\triangle BEC$ 中,

$CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$,

$\therefore \tan \angle ACB = \frac{BE}{CE} = \frac{\frac{6}{5}\sqrt{10}}{\frac{3}{5}\sqrt{10}} = 2$.

(3)



①当点 P 在 x 轴上方时, 过 P 作 $OQ \perp x$ 轴于 Q ,

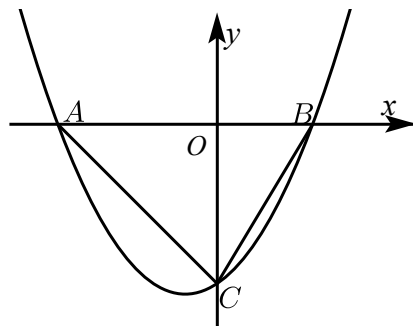
设 $P(x, -x^2 + 2x + 3)$,

$$\begin{aligned} \therefore OQ &= x, PQ = -x^2 + 2x + 3, \\ \therefore AQ &= x + 1, \\ \therefore \angle PAB &= \angle ACB, \\ \therefore \tan \angle PAB &= \tan \angle ACB = 2, \\ \therefore \tan \angle PAB &= \frac{PQ}{AQ} = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x + 1}, \\ \therefore \frac{-x^2 + 2x + 3}{x + 1} &= 2, \\ \text{解得 } x &= 1 \text{ 或 } x = -1 \text{ (舍去)}, \\ \therefore P &(1, 4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{②当点 } P &\text{ 在 } x \text{ 轴下方时,} \\ \text{同理可知 } \tan \angle PAB &= \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} = 2, \\ \text{解得 } x &= 5 \text{ 或 } x = -1 \text{ (舍去)}, \\ \therefore P &(5, -12), \\ \text{综上 } P &\text{ 坐标为 } (1, 4) \text{ 或 } (5, -12). \end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次函数与直角三角形结合

11. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 5 (a \neq 0)$ 与 x 轴交于点 $A(-5, 0)$ 和点 $B(3, 0)$, 与 y 轴交于点 C .



- (1) 求该抛物线的解析式及顶点坐标.
- (2) 若点 E 为 x 轴下方抛物线上的一动点, 当 $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ABC}$ 时, 求点 E 的坐标.
- (3) 在 (2) 的条件下, 抛物线上有一点, 使 $\angle BAP = \angle CAE$, 求出此时点 P 的横坐标.

【答案】 (1) 抛物线解析式为 $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 5$, 顶点坐标为 $(-1, -\frac{16}{3})$.

(2) E 点坐标为 $(-2, -5)$.

(3) $\frac{9}{4}$ 或 $\frac{15}{4}$.

【解析】 (1) 把 A 、 B 两点坐标代入解析式可得 $\begin{cases} 25a - 5b - 5 = 0 \\ 9a + 3b - 5 = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases}$,
 $\therefore$ 抛物线解析式为 $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 5$,

$$\text{当 } x = -\frac{\frac{2}{3}}{2 \times \frac{1}{3}} = -1 \text{ 时, } y = \frac{1}{3} \times (-1)^2 + \frac{2}{3} \times (-1) - 5 = -\frac{16}{3},$$

故抛物线顶点坐标为 $\left(-1, -\frac{16}{3}\right)$.

(2) 在 $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 5$ 中, 令 $x = 0$ 可得 $y = -5$,

$\therefore C(0, -5)$,

$\because S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ABC}$, 且 E 点在 x 轴下方的抛物线上,

$\therefore E$ 点纵坐标和 C 点纵坐标相同,

当 $y = -5$ 时, 代入可得 $\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 5 = -5$,

解得 $x = -2$ 或 $x = 0$ (舍去),

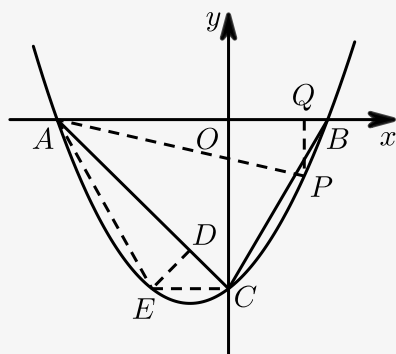
$\therefore E$ 点坐标为 $(-2, -5)$.

(3) 存在.

假设存在满足条件的 P 点, 其坐标为 $\left(m, \frac{1}{3}m^2 + \frac{2}{3}m - 5\right)$,

如图, 连接 AP 、 CE 、 AE , 过 E 作 $ED \perp AC$ 于点 D ,

过 P 作 $PQ \perp x$ 轴于点 Q ,



则 $AQ = AO + OQ = 5 + m$, $PQ = \left|\frac{1}{3}m^2 + \frac{2}{3}m - 5\right|$,

在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中, $OA = OC = 5$, 则 $AC = 5\sqrt{2}$, $\angle ACO = \angle DCE = 45^\circ$,

由 (2) 可得 $EC = 2$, 在 $\text{Rt}\triangle EDC$ 中, 可得 $DE = DC = \sqrt{2}$,

$\therefore AD = AC - DC = 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$,

当 $\angle BAP = \angle CAE$ 时, 则 $\triangle EDA \sim \triangle PQA$,

$$\therefore \frac{ED}{AD} = \frac{PQ}{AQ}, \text{ 即 } \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{\left|\frac{1}{3}m^2 + \frac{2}{3}m - 5\right|}{5+m},$$

$$\therefore \frac{1}{3}m^2 + \frac{2}{3}m - 5 = \frac{1}{4}(5+m) \text{ 或 } \frac{1}{3}m^2 + \frac{2}{3}m - 5 = -\frac{1}{4}(5+m),$$

当 $\frac{1}{3}m^2 + \frac{2}{3}m - 5 = \frac{1}{4}(5+m)$ 时, 整理可得 $4m^2 + 5m - 75 = 0$,

解得 $m = \frac{15}{4}$, $m = -5$ (与 A 点重合, 舍去),

当 $\frac{1}{3}m^2 + \frac{2}{3}m - 5 = -\frac{1}{4}(5+m)$ 时, 整理可得 $4m^2 + 11m - 45 = 0$,

解得 $m = \frac{9}{4}$, $m = -5$ (与 A 点重合, 舍去),

$\therefore$ 存在满足条件的点 P ，其横坐标为 $\frac{9}{4}$ 或 $\frac{15}{4}$ 。

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

12. 已知二次函数 $y = -x^2 + bx + 3$ 的图象与 x 轴交于点 A, B （点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C ，顶点为 D 。

（1）当 $b = 6$ 时，求二次函数的最大值。

（2）当 $b = 2$ 时，点 $P(0, t)$ ($t < -1$) 是 y 轴上的点， $Q(-5, 0)$ ，将点 Q 绕点 P 顺时针旋转 90° 得到点 E ，点 E 恰好落在该二次函数的图象上，求 t 的值。

（3） M 是该二次函数图象上的一点，在（2）的条件下，连接 AD, AE, BC, CM ，使 $\angle DAE = \angle MCB$ ，求点 M 的坐标。

【答案】（1）12。

（2）-2。

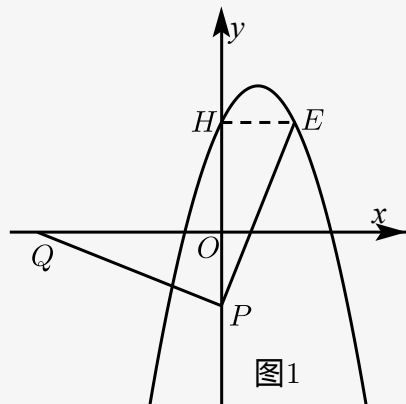
（3） $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{4}\right)$ 或 $(4, -5)$ 。

【解析】（1）当 $b = 6$ 时， $y = -x^2 + 6x + 3 = -(x - 3)^2 + 12$ ，

$\therefore$ 二次函数的最大值为12。

（2）当 $b = 2$ 时， $y = -x^2 + 2x + 3$ ，

如图1，过点 E 作 $EH \perp y$ 轴于点 H ，



$\because \angle PQO + \angle OPQ = 90^\circ, \angle OPQ + \angle HPE = 90^\circ,$

$\therefore \angle EPH = \angle PQO,$

$\because$ 将点 Q 绕点 P 顺时针旋转 90° 得到点 E ，

$\therefore PE = PQ,$

又 $\angle PHE = \angle QOP = 90^\circ,$

$\therefore \triangle EPH \cong \triangle PQO,$

$\therefore EH = OP = -t, HP = OQ = 5, OH = HP - OP = 5 - (-t) = 5 + t,$

$$\therefore E(-t, 5+t),$$

当点 E 恰好在该二次函数的图象上时, 有 $5+t = -t^2 - 2t + 3$,

解得 $t_1 = -2$, $t_2 = -1$ (舍去),

$$\therefore t = -2.$$

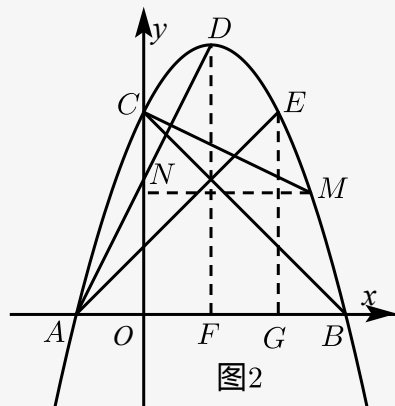
(3) 设点 $M(m, -m^2 + 2m + 3)$,

①若点 M 在 x 轴上方,

如图2, 过点 M 作 $MN \perp y$ 轴于点 N ,

过点 D 作 $DF \perp x$ 轴于点 F ,

过点 E 作 $EG \perp x$ 轴于点 G ,



$$y = -x^2 + 2x + 3,$$

令 $x = 0$, 则 $y = 3$,

$$\therefore C(0, 3),$$

令 $y = 0$, 则 $-x^2 + 2x + 3 = 0$, 解得 $x_1 = 3$, $x_2 = -1$,

$$\therefore A(-1, 0), B(3, 0),$$

$$\therefore OB = OC = 3,$$

$\therefore \angle OCB = \angle OBC = 45^\circ$. 由(2)知 $E(2, 3)$,

$$\therefore AG = EG = 3,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle AEG = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle MCB = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle MCN = \angle BAD,$$

$$\therefore \tan \angle MCN = \tan \angle BAD,$$

$$y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4,$$

$$\therefore D(1, 4),$$

$$\therefore OF = 1, DF = 4,$$

$$\therefore AF = 2.$$

在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中, $\tan \angle BAD = \frac{DF}{AF} = 2$,

$$\begin{aligned} & \text{在Rt}\triangle CMN\text{中}, \tan \angle MCN = \frac{MN}{CN} = \frac{m}{3 - (-m^2 + 2m + 3)}, \\ & \therefore \frac{m}{m^2 - 2m} = 2, \\ & \text{解得 } m_1 = 0 \text{ (舍去)}, m_2 = \frac{5}{2}, \\ & \therefore M\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{4}\right). \end{aligned}$$

②若点M在x轴下方,

如图3, 过点M作MN⊥y轴于点N,

过点D作DF⊥x轴于点F, MC与x轴的交点记为K,

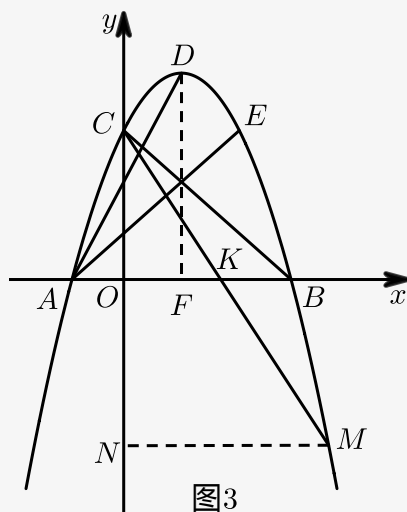


图3

$$\text{有 } \angle CKO = \angle MCB + \angle CBO = \angle MCB + 45^\circ,$$

$$\because MN \parallel x\text{轴},$$

$$\therefore \angle CMN = \angle CKO,$$

$$\therefore \angle CMN = \angle MCB + 45^\circ,$$

$$\because \angle BAD = \angle DAE + \angle EAB = \angle DAE + 45^\circ,$$

$$\text{又 } \angle MCB = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle CMN = \angle BAD,$$

$$\text{在Rt}\triangle ADF\text{中}, \tan \angle BAD = \frac{DF}{AF} = 2,$$

$$\text{在Rt}\triangle CMN\text{中}, \tan \angle CMN = \frac{CN}{MN} = \frac{3 - (-m^2 + 2m + 3)}{m},$$

$$\therefore \frac{m^2 - 2m}{m} = 2, \text{解得 } m_3 = 0 \text{ (舍去)}, m_4 = 4,$$

$$\therefore M(4, -5).$$

综上所述, 点M的坐标为 $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{4}\right)$ 或 $(4, -5)$.

【标注】【知识点】二次函数与角度问题

13. 已知抛物线 $y = x^2 - 2mx + 3m$ 与 x 轴交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的右侧), 与 y 轴交于点 $C(0, -3)$, 顶点为 D .
- (1) 求该抛物线的解析式及顶点 D 的坐标.
- (2) 若此抛物线的对称轴上的点 P 满足 $\angle APB = \angle ACB$, 求点 P 的坐标.

【答案】 (1) $y = x^2 + 2x - 3$, 顶点 D 的坐标为 $(-1, -4)$.

(2) 点 P 的坐标为 $(-1, -1 - \sqrt{5})$ 或 $(-1, 1 + \sqrt{5})$.

【解析】 (1) 把点 C 的坐标代入抛物线解析式,

$$\text{得 } 3m = -3,$$

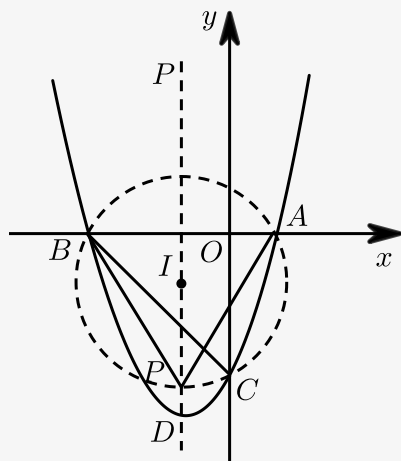
$$\text{解得 } m = -1,$$

$$\text{故该抛物线的解析式为 } y = x^2 + 2x - 3,$$

$$\therefore y = x^2 + 2x + 1 - 4 = (x + 1)^2 - 4,$$

$$\therefore \text{顶点 } D \text{ 的坐标为 } (-1, -4).$$

(2) 作 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot I$,



设 $\odot I$ 与抛物线的对称轴位于 x 轴下方的部分的交点为点 P ,

点 P 关于 x 轴的对称点为点 P' ,

可知圆心 I 必在 AB 边的垂直平分线即抛物线的对称轴直线 $x = -1$ 上,

$\therefore \angle APB, \angle ACB$ 都是 $\widehat{AB}$ 所对的圆周角,

$$\therefore \angle APB = \angle ACB,$$

设圆心 $I(-1, m)$,

$$\text{由 } AI = CI, \text{ 得 } 2^2 + m^2 = 1^2 + (m + 3)^2,$$

$$\therefore m = -1, PI = AI = \sqrt{5},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (-1, -1 - \sqrt{5}),$$

$$\text{由对称性得点 } P' \text{ 的坐标为 } (-1, 1 + \sqrt{5}),$$

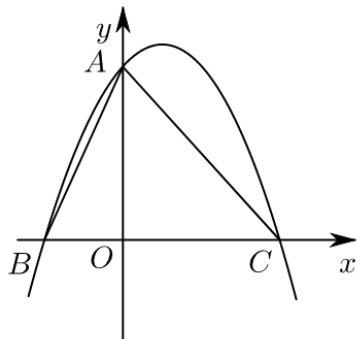
$$\therefore \text{符合题意的点 } P \text{ 的坐标为 } (-1, -1 - \sqrt{5}) \text{ 或 } (-1, 1 + \sqrt{5}).$$

3. 和差角问题

🧠 教法备注

在遇到更一般的和差角问题时，一般可以通过导角转化为定角或等角问题。

14. 如图，抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + 3$ ，与 x 轴交于点 $B(-2, 0)$ 和 C ，与 y 轴交于点 A ，点 M 在 y 轴上。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 连接 BM 并延长，交抛物线于 D ，过点 D 作 $DE \perp x$ 轴于 E 。当以 B 、 D 、 E 为顶点的三角形与 $\triangle AOC$ 相似时，求点 M 的坐标。
- (3) 连接 BM ，当 $\angle OMB + \angle OAB = \angle ACO$ 时，求 AM 的长。

【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$ 。

(2) $(0, 2)$ 或 $(0, -2)$ 。

(3) $AM = 7$ 或 13 。

【解析】(1) 将点 $B(-2, 0)$ 代入抛物线的解析式 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + 3$ 得，

$$-\frac{1}{2} \times (-2)^2 - 2b + 3 = 0,$$

$$\therefore b = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3.$$

(2) 如图1中，

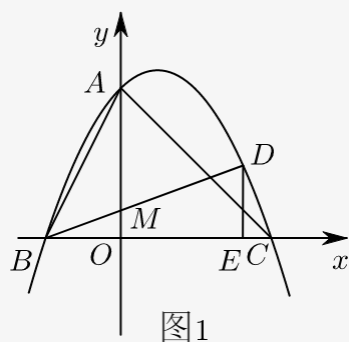


图1

∵ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$, 与 x 轴交于 $B(-2, 0)$, $A(3, 0)$,

$C(0, 3)$,

∴ $OA = OC$,

∴ $\triangle AOC$ 是等腰直角三角形 ,

∵ $OM \parallel DE$,

∴ $\triangle BMO \sim \triangle BDE$,

∵ 要使 B 、 D 、 E 为顶点的三角形与 $\triangle AOC$ 相似 ,

∴ 只要 $\triangle BOM \sim \triangle AOC$, 设 $M(0, m)$,

$$\therefore \frac{OM}{OB} = \frac{OA}{OC} ,$$

$$\therefore \frac{|m|}{2} = \frac{3}{3} ,$$

$$\therefore m = \pm 2 ,$$

∴ 点 M 的坐标为 $(0, 2)$ 或 $(0, -2)$.

(3) 如图2中 , 作 $AG \perp AC$ 交 x 轴于 G , $BF \perp AG$ 于 F .

$$OA = OC , \angle AOC = \angle GAC = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle ACO = \angle OAG = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle OMB + \angle OAB = \angle ACO = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle FAB = \angle OMB , \text{ 设 } M(n, 0) ,$$

$$\therefore \angle AFB = \angle BOM = 90^\circ ,$$

$$\therefore \triangle AFB \sim \triangle MOB ,$$

$$\therefore \frac{OM}{AF} = \frac{OB}{FB} , \therefore FB = \frac{\sqrt{2}}{2} , AF = \frac{5\sqrt{2}}{2} , OB = 2 ,$$

$$\therefore \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} ,$$

$$\therefore n = \pm 10 ,$$

∴ 点 M 的坐标为 $(0, 10)$ 或 $(0, -10)$,

∴ $AM = 7$ 或 13 .

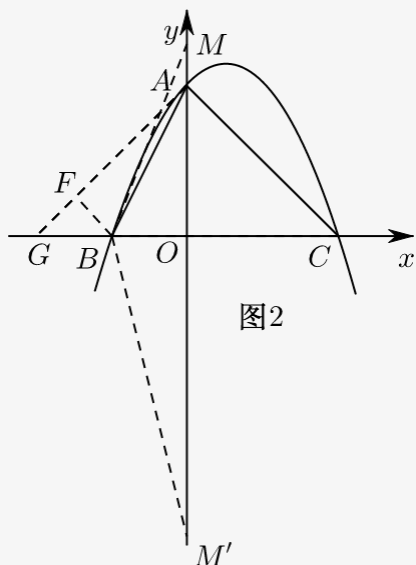
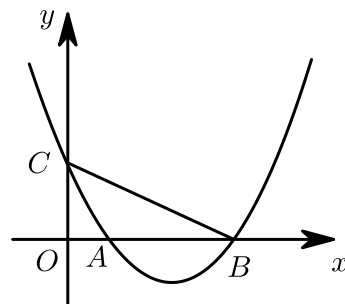


图2

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

15. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 $A(1, 0)$ ， $B(4, 0)$ 两点，与 y 轴交于点 $C(0, 2)$ 。



- (1) 求抛物线的表达式。
- (2) 求证： $\angle CAO = \angle BCO$ 。
- (3) 若点 P 是抛物线上的一点，且 $\angle PCB + \angle ACB = \angle BCO$ ，求直线 CP 的表达式。

【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2$ 。

(2) 证明见解析。

(3) $y = -\frac{4}{3}x + 2$ 或 $y = 2$ 。

【解析】 (1) 设抛物线的解析式为 $y = a(x-1)(x-4)$ ，

$\because$ 将 $C(0, 2)$ 代入得： $4a = 2$ ，解得 $a = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{2}(x-1)(x-4)$ ，即 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2$ 。

(2) 如图1所示：连接 AC ，

$\because$ 由题意可知： $OA = 1$ ， $OC = 2$ ， $OB = 4$ ，

$$\begin{aligned}\therefore \frac{OA}{OC} &= \frac{OC}{OB} = \frac{1}{2}, \\ \text{又} \because \angle COA &= \angle BOC, \\ \therefore \triangle AOC &\sim \triangle COB, \\ \therefore \angle CAO &= \angle BCO.\end{aligned}$$

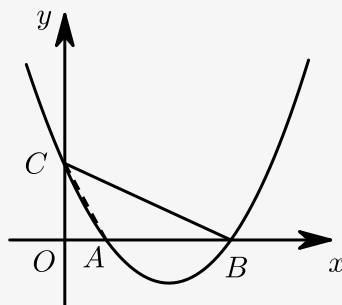


图 1

(3) ①如图2所示：

$$\begin{aligned}\therefore \angle PCB + \angle ACB &= \angle BCO, \\ \angle ACO + \angle ACB &= \angle BCO, \\ \therefore \angle PCB &= \angle ACO, \\ \therefore \triangle AOC &\sim \triangle COB, \\ \therefore \angle ACO &= \angle CBO, \\ \therefore \angle PCB &= \angle CBO, \\ \therefore CD &= BD,\end{aligned}$$

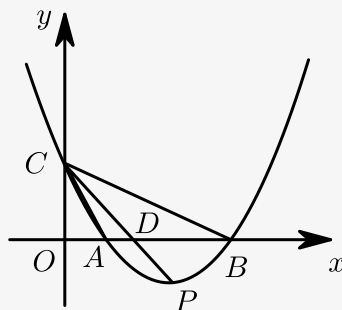


图 2

设 $OD = x$ ，则 $DB = CD = 4 - x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DCO$ 中，由勾股定理得： $OD^2 + CO^2 = DC^2$ ，即 $x^2 + 2^2 = (4 - x)^2$ ，

解得： $x = 1.5$ ，

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(1.5, 0)$ ，

设直线 CP 的解析式为 $y = kx + b$ ，

$$\therefore \text{将 } (0, 2), D(1.5, 0) \text{ 代入得：} \begin{cases} 1.5k + b = 0 \\ b = 2 \end{cases}, \text{ 解得：} \begin{cases} k = -\frac{4}{3} \\ b = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 CP 的解析式为 $y = -\frac{4}{3}x + 2$ ，

如图3所示：

$$\begin{aligned}\therefore \angle PCB + \angle ACB &= \angle BCO, \\ \angle ACO + \angle ACB &= \angle BCO, \\ \therefore \angle PCB &= \angle ACO, \\ \therefore \triangle AOC &\sim \triangle COB, \\ \therefore \angle ACO &= \angle CBO, \\ \therefore \angle PCB &= \angle CBO, \\ \therefore CP &\parallel OB, \\ \therefore CP \text{ 的解析式} &\text{为 } y = 2,\end{aligned}$$

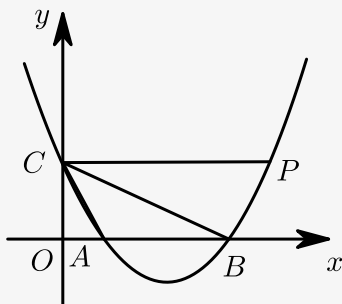


图 3

综上所述，直线 CP 的解析式为 $y = -\frac{4}{3}x + 2$ 或 $y = 2$ 。

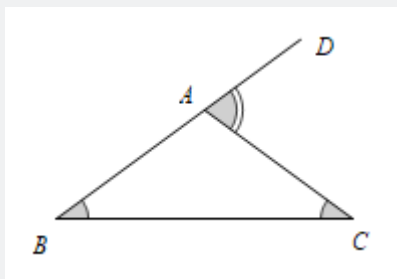
【标注】【知识点】二次函数与角度问题

4. 倍半角问题

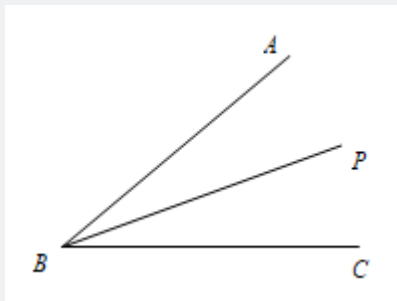
教法备注

倍半角问题主要通过等腰三角形、角分线或轴对称将“倍角”和“半角”转化为常规的定角或等角问题。

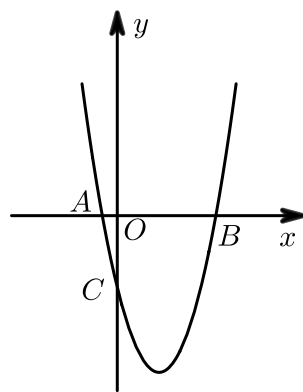
如图，在等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，则 $\angle CAD=2\angle B$ 。



如图，若BP平分 $\angle ABC$ ，则 $\angle ABC=2\angle ABP=2\angle PBC$ 。



16. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ 交 x 轴于点 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ 两点，交 y 轴于点 C 。



(1) 求抛物线的解析式。

(2) 在抛物线上，找一点 N 使 $\angle NCA = 2\angle ACB$ ，求点 N 的坐标。

【答案】 (1) $y = x^2 - 2x - 3$ 。

(2) $N(\frac{5}{3}, -\frac{32}{9})$ 。

【解析】 (1)

把 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ 两点代入 $y = ax^2 + bx - 3$ 得 $\begin{cases} 0 = a - b - 3 \\ 0 = 9a + 3b - 3 \end{cases}$, 解得

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

所以抛物线的解析式 $y = x^2 - 2x - 3$.

(2) 如图2, 作 $NQ \perp AB$ 于点 Q , $CH \perp NQ$ 于点 H ,

$$\because OB = 3, OC = 3,$$

$$\therefore \angle OCB = \angle BCH = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle NCA = 2\angle ACB,$$

$$\therefore \angle OCA = \angle NCH, \angle AOC = \angle NHC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AOC \sim \triangle NHC,$$

设 $N(x, y)$,

$$\therefore \frac{NH}{AO} = \frac{CH}{CO},$$

$$\therefore \frac{-y-3}{1} = \frac{x}{3}, \text{ 解得 } x = -3y-9,$$

$$\text{与 } y = x^2 - 2x - 3 \text{ 联立得 } \begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ x = -3y - 9 \end{cases}, \text{ 解得}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases} \text{ (舍去)}, \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -\frac{32}{9} \end{cases}.$$

$$\therefore N\left(\frac{5}{3}, -\frac{32}{9}\right).$$

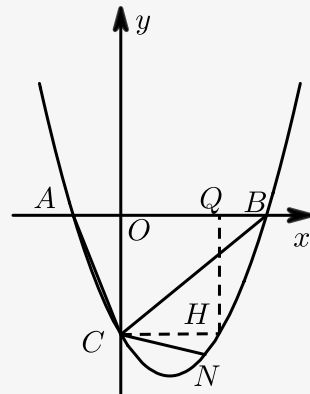
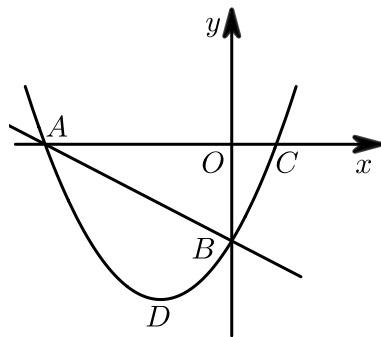


图 2

【标注】【知识点】二次函数与面积

17. 已知, 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 $y = -\frac{1}{2}x - 2$ 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B , 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 经过 A 、 B 两点, 与 x 轴的另一个交点为 C .



(1) 求抛物线的函数解析式.

(2) D 为直线 AB 下方抛物线上一动点.

① 连接 DO 交 AB 于点 E , 若 $DE : OE = 3 : 4$, 求点 D 的坐标.

② 是否存在点 D , 使得 $\angle DBA$ 的度数恰好是 $\angle BAC$ 度数 2 倍, 如果存在, 求点 D 的坐标, 如果不存在, 说明理由.

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2$.

(2) ① $(-1, -3)$ 或 $(-3, -2)$.

② 存在, 点 D 的坐标 $(-2, -3)$.

【解析】(1) 把 $A(-4, 0)$, $B(0, -2)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 中得:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \times (-4)^2 - 4b + c = 0 \\ c = -2 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ c = -2 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的函数解析式为: $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2$.

(2) ① 如图1, 过点 D 作 x 轴的垂线交 AB 于点 F , 设点 $D\left(m, \frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m - 2\right)$,

$$F\left(m, -\frac{1}{2}m - 2\right),$$

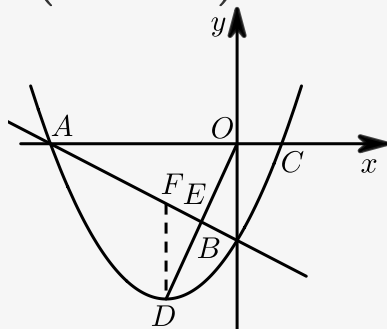


图 1

$$\therefore DF \parallel OB,$$

$$\therefore \triangle DFE \sim \triangle OBE,$$

$$\therefore \frac{DE}{OE} = \frac{DF}{OB},$$

$$\therefore DE : OE = 3 : 4,$$

$$\therefore FD : BD = 3 : 4,$$

$$\therefore \frac{FD}{2} = \frac{3}{4},$$

$$\text{即: } FD = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \left(-\frac{1}{2}m - 2\right) - \left(\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m - 2\right) = \frac{3}{2},$$

$$\text{解之得: } m_1 = -1, m_2 = -3,$$

$$\therefore D \text{ 的坐标为 } (-1, -3) \text{ 或 } (-3, -2).$$

② 存在,

如图2, 在 y 轴的正半轴上截取 $OH = OB$, 可得 $\triangle ABH$ 是等腰三角形,

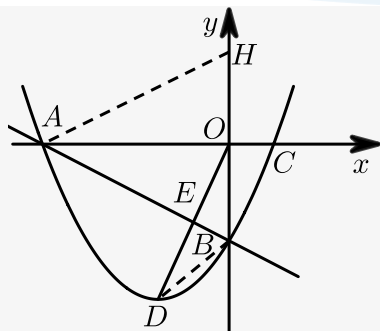


图 2

$$\therefore \angle BAH = 2\angle BAC,$$

$$\therefore \angle DBA = 2\angle BAC,$$

$$\therefore \angle DBA = \angle BAH,$$

$$\therefore AH \parallel DB,$$

$$\therefore \text{直线 } AH \text{ 的解析式是: } y = \frac{1}{2}x + 2, \text{ 则直线 } DB \text{ 的解析式是: } y = \frac{1}{2}x - 2,$$

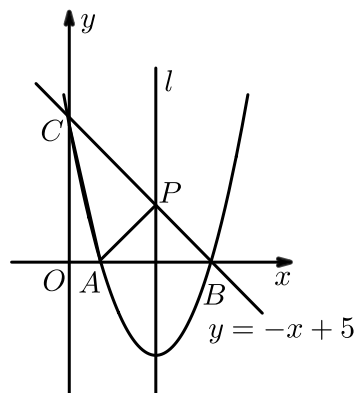
$$\text{则 } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2 \\ y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \text{ (舍)},$$

解得点 D 的坐标 $(-2, -3)$.

【标注】【能力】抽象概括能力

【知识点】二次函数与动点问题

18. 如图, 抛物线 $y = ax^2 - 6x + c$ 交 x 轴于 A, B 两点, 交 y 轴于点 C . 直线 $y = -x + 5$ 经过点 B, C .



(1) 求抛物线的解析式.

(2) 抛物线的对称轴 l 与直线 BC 相交于点 P , 连接 AC, AP , 判定 $\triangle APC$ 的形状, 并说明理由.

(3) 在直线 BC 上是否存在点 M , 使 AM 与直线 BC 的夹角等于 $\angle ACB$ 的 2 倍? 若存在, 请求出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $y = x^2 - 6x + 5$.

(2) $\triangle APC$ 为直角三角形, 证明见解析.

(3) 存在, $M_1\left(\frac{13}{6}, \frac{17}{6}\right)$, $M_2\left(\frac{23}{6}, \frac{7}{6}\right)$.

【解析】(1) $\because$ 直线 $y = -x + 5$ 经过点 B, C ,

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, 可得 $y = 5$, 即 C 的坐标为 $(0, 5)$,

当 $y = 0$ 时, 可得 $x = 5$, 即 B 的坐标为 $(5, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} 5 = a \cdot 0^2 - 6 \times 0 + c \\ 0 = 5^2 a - 6 \times 5 + c \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = 1 \\ c = 5 \end{cases},$$

$\therefore$ 该抛物线的解析式为 $y = x^2 - 6x + 5$.

(2) $\triangle APC$ 为直角三角形,

$\therefore$ 解方程 $x^2 - 6x + 5 = 0$, 则 $x_1 = 1, x_2 = 5$,

$\therefore A(1, 0), B(5, 0)$.

$\therefore$ 抛物线 $y = x^2 - 6x + 5$ 的对称轴 l 为 $x = 3$,

$\therefore \triangle APB$ 为等腰三角形.

$\therefore C$ 的坐标为 $(0, 5), B$ 的坐标为 $(5, 0)$,

$\therefore OB = CO = 5$, 即 $\angle ABP = 45^\circ$,

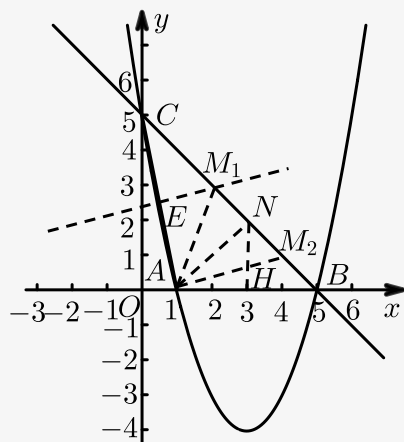
$\therefore \angle PAB = 45^\circ$,

$\therefore \angle APB = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$,

$\therefore \angle APC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$,

$\therefore \triangle APC$ 为直角三角形.

(3) 如图: 作 $AN \perp BC$ 于 N , $NH \perp x$ 轴于 H , 作 AC 的垂直平分线交 BC 于 M_1 , AC 于 E ,



$\therefore M_1A = M_1C$,

$\therefore \angle ACM_1 = \angle CAM_1$,

$\therefore \angle AM_1B = 2\angle ACB$,

$\therefore \triangle ANB$ 为等腰直角三角形,

$\therefore AH = BH = NH = 2$,

$\therefore N(3, 2)$,

设 AC 的函数解析式为 $y = kx + b$,

$\because C(0, 5), A(1, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} 5 = k \cdot 0 + b \\ 0 = k + b \end{cases}, \text{解得 } b = 5, k = -5,$$

$\therefore AC$ 的函数解析式为 $y = -5x + 5$,

设 EM_1 的函数解析式为 $y = \frac{1}{5}x + n$,

$\because$ 点 E 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$,

$$\therefore \frac{5}{2} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + n, \text{解得: } n = \frac{12}{5},$$

$\therefore EM_1$ 的函数解析式为 $y = \frac{1}{5}x + \frac{12}{5}$,

$$\therefore \begin{cases} y = -x + 5 \\ y = \frac{1}{5}x + \frac{12}{5} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = \frac{13}{6} \\ y = \frac{17}{6} \end{cases},$$

$\therefore M_1$ 的坐标为 $\left(\frac{13}{6}, \frac{17}{6}\right)$,

在直线 BC 上作点 M_1 关于 N 点的对称点 M_2 ,

设 $M_2(a, -a + 5)$,

$$\text{则有: } 3 = \frac{\frac{13}{6} + a}{2}, \text{解得 } a = \frac{23}{6},$$

$$\therefore -a + 5 = \frac{7}{6},$$

$\therefore M_2$ 的坐标为 $\left(\frac{23}{6}, \frac{7}{6}\right)$.

综上, 存在使 AM 与直线 BC 的夹角等于 $\angle ACB$ 的2倍的点, 且坐标为

$$M_1\left(\frac{13}{6}, \frac{17}{6}\right), M_2\left(\frac{23}{6}, \frac{7}{6}\right).$$

【标注】【知识点】二次函数与角度问题